Devoir sur Table 1

Durée : 4h

1. Les exercices sont indépendants. Ils peuvent être traités dans un ordre quelconque.
2. Tous les documents sur papier sont interdits.
3. Les calculatrices ne sont pas autorisées.
4. Le matériel de géométrie (règle, compas, équerre) est autorisé.
5. La notation des copies tiendra compte dans une large mesure de la qualité de la rédaction. Ceci implique que vous devez faire des raisonnements clairs, concis et complets, utiliser un langage mathématiques adapté et précis, être lisible et éviter les fautes d'orthographe et de grammaire.
6. Si, au cours du devoir, vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, vous le signalez sur votre copie et poursuivez sa composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre.
7. Mettez en évidence vos résultats en les encadrant.
8. Conformément au règlement de la Banque PT
 - Composer lisiblement sur les copies avec un stylo à bille à encre foncée : bleue ou noire.
 - L'usage de liquide de correction et dérouleur de ruban correcteur est interdit.

Le soin apporté à la copie fera l'objet d'une évaluation suivant les critères suivants :

- Mise en évidence des résultats
- Soin et lisibilité de la copie. En particulier les traits, y compris pour les ratures, devront être tracés à l'aide d'une règle
- Respect des consignes concernant le liquide de correction et le dérouleur de ruban correcteur
- Respect de la grammaire et de l'orthographe

Exercice 1*(Banque PT, Maths C, 2024)**Préambule*

1. Rappeler, pour tout réel x de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, les deux expressions (l'une faisant intervenir la fonction cosinus, l'autre la fonction tangente) de la dérivée de la fonction

$$x \mapsto \tan x$$

2. (a) Montrer que la fonction g qui, à tout réel x de $]0, \pi[\setminus \left\{ \frac{\pi}{2} \right\}$, associe $g(x) = \frac{1}{\tan(x)}$, se prolonge en une fonction $\tilde{g}$ continue sur $]0, \pi[$. Montrer que $\tilde{g}$ est dérivable sur $]0, \pi[$.
(b) En déduire une primitive sur $]0, \pi[$ de la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{\sin^2(x)}$$

3. On considère les fonctions

$$f_1 : x \mapsto \tan\left(\frac{x}{2}\right) \quad \text{et} \quad f_2 : x \mapsto \ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$

- (a) Expliciter les domaines de définition respectifs $\mathcal{D}_1 \subset \mathbb{R}$ et $\mathcal{D}_2 \subset \mathbb{R}$ des fonctions f_1 et f_2 .
- (b) Montrer que les fonctions f_1 et f_2 sont périodiques, de périodes respectives T_1 et T_2 que l'on explicitera.
- (c) Donner les domaines de dérivabilité respectifs des fonctions f_1 et f_2 .
- (d) Donner, en tout réel x du domaine de dérivabilité de la fonction f_1 , l'expression de $f_1'(x)$.

(e) Montrer que, en tout réel x du domaine de dérivabilité de la fonction f_2 ,

$$f_2'(x) = \frac{1}{2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right)}$$

et en déduire une expression simplifiée de $f_2'(x)$.

(f) Étudier les variations des fonctions f_1 et f_2 . On donnera leurs tableaux de variations respectifs sur une période, en précisant les limites aux bords.

Donner, également, les valeurs des fonctions f_1 et f_2 en $\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

(g) Tracer, sur un même graphe (échelle : 1 cm pour une unité), la courbe représentative de f_1 sur $\mathcal{D}_1 \cap [-2\pi, 2\pi]$ et la courbe représentative de f_2 sur $\mathcal{D}_2 \cap [-2\pi, 2\pi]$.

4. On considère la fonction

$$f_3 : x \mapsto \frac{1}{\cos^2(x)}$$

(a) Expliciter le domaine de définition $\mathcal{D}_3 \subset \mathbb{R}$ de la fonction f_3 . Quel est le domaine de dérivabilité de f_3 ?

(b) Étudier les variations de la fonction f_3 sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. On donnera son tableau de variations, en précisant les limites aux bords.

Partie I

On considère l'équation différentielle sur $]0, \pi[$:

$$y''(x) + y(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \quad (\mathcal{E})$$

1. On introduit la fonction f_4 qui, à tout réel x de $]0, \pi[$, associe :

$$f_4(x) = (\sin(x)) \ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$

Montrer que, pour tout réel x de $]0, \pi[$:

$$f_4''(x) = -f_4(x) + \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

2. Résoudre l'équation homogène associée à $(\mathcal{E})$.

3. Montrer que les solutions y de $(\mathcal{E})$ sur $]0, \pi[$ sont de la forme :

$$y = y_0 + f_4$$

où y_0 est une solution de l'équation homogène associée à $(\mathcal{E})$.

4. Dans cette question, on souhaite retrouver de façon différente le résultat obtenu précédemment. Pour cela, on cherche les solutions y de $(\mathcal{E})$ sur $]0, \pi[$ de la forme :

$$x \mapsto y(x) = z(x) \sin(x)$$

où z est une fonction deux fois dérivable sur $]0, \pi[$.

(a) Montrer que si y est solution de $(\mathcal{E})$ sur $]0, \pi[$, alors z' est solution sur $]0, \pi[$ d'une équation différentielle du premier ordre, notée $(\mathcal{E}')$.

(b) Déterminer les solutions de l'équation homogène associée à $(\mathcal{E}')$, puis appliquer la méthode de variation de la constante pour déterminer les solutions de $(\mathcal{E}')$. Donner alors, pour tout réel x de $]0, \pi[$, l'expression de $z'(x)$ en fonction de x .

(c) A l'aide du Préambule, exprimer, pour tout réel x de $]0, \pi[$, $z(x)$ en fonction de x .

(d) Montrer que l'on retrouve bien l'expression des solutions de $(\mathcal{E})$ sur $]0, \pi[$ obtenues plus haut.

Exercice 2

(EDHEC ECE 2019)

On considère dans cet exercice l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$, dont on note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique. Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice :

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Partie I

1. (a) Calculer A^2 puis vérifier que A^3 est la matrice nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

(b) Déterminer une base et la dimension du noyau de f .

2. Soit $e'_1 = (-1, -1, 1)$, $e'_2 = (2, -1, 1)$ et $e'_3 = (-1, 2, 1)$.

(a) Démontrer que la famille $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de E .

(b) Démontrer que la matrice représentative de f dans la base $\mathcal{B}'$ est la matrice $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. On pose : $M = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

On note h l'endomorphisme de E dont la matrice représentative dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice M .

(a) Déterminer deux réels α et β tels que $M = \alpha A + \beta I$, où I est la matrice identité de taille 3.

(b) Déterminer la matrice M' de h dans la base $\mathcal{B}'$.

(c) En déduire que M est inversible.

(d) À l'aide de la question 1.(a), calculer $(M - I)^3$. En déduire l'expression de M^{-1} en fonction des matrices I , M et M^2 .

(e) À l'aide de la formule du binôme de Newton, exprimer M^n pour tout entier naturel n , en fonction des matrices I , A et A^2 .

Cette formule est-elle vérifiée pour $n = -1$?

Partie II

Dans cette partie, on veut montrer qu'il n'existe aucun endomorphisme g de E vérifiant $g \circ g = f$.

On suppose donc par l'absurde qu'il existe une matrice V carrée d'ordre 3 telle que :

$$V^2 = T$$

On note g l'endomorphisme dont la matrice représentative dans la base $\mathcal{B}'$ est V .

1. Montrer que $V T = T V$. En déduire que $g \circ f = f \circ g$.

2. (a) Montrer que $g(e'_1)$ appartient au noyau de f .

En déduire qu'il existe un réel a tel que $g(e'_1) = a e'_1$.

(b) Montrer que $g(e'_2) - a e'_2$ appartient aussi au noyau de f .

En déduire qu'il existe un réel b tel que $g(e'_2) = b e'_1 + a e'_2$.

(c) Montrer que : $f \circ g(e'_3) = g \circ f(e'_3) = a e'_2 + b e'_1$.

En déduire que $g(e'_3) - a e'_3 - b e'_2$ appartient au noyau de f .

(d) En déduire qu'il existe un réel c tel que : $V = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.

3. Calculer V^2 en fonction de a , b et c , puis en utilisant l'hypothèse $V^2 = T$, obtenir une contradiction.

Exercice 3*(Banque PT, Maths A, 2024)*

- On dispose d'un paquet de bonbons qui contient uniquement des bonbons à la menthe et des nougats.
- On suppose que l'emballage des bonbons les rend indiscernables.
- Alice n'aime que les bonbons à la menthe et Cyril que les nougats.

Par ailleurs, on pourra utiliser les notations suivantes : pour tout entier $n \geq 1$,

- M_n est l'événement « le n -ième bonbon tiré est un bonbon à la menthe » ;
- N_n est l'événement « le n -ième bonbon tiré est un nougat ».

On suppose que le paquet de bonbons contient 10 nougats et 10 bonbons à la menthe. Alice tire 1 bonbon dans le paquet et le garde dans sa main puis Cyril fait de même.

On note :

- X_A la variable aléatoire égale à 1 si Alice tire un bonbon à la menthe et égale à 0 si Alice tire un nougat.
- X_C la variable aléatoire égale à 1 si Cyril tire un nougat et égale à 0 si Cyril tire un bonbon à la menthe.

1. (a) Quelle est la loi de X_A ? On donnera son nom et la valeur du ou des paramètres.
(b) Donner les valeurs de l'espérance et la variance de X_A .
2. (a) Déterminer $\mathbb{P}(X_A = 0, X_C = 0)$.
(b) Déterminer la loi conjointe du couple (X_A, X_C) .
3. En déduire la loi de X_C *une justification est attendue*.
4. (a) Vérifier que la covariance $\text{Cov}(X_A, X_C)$ de X_A et X_C vaut $\frac{1}{76}$.
(b) Les variables aléatoires X_A et X_C sont-elles indépendantes ?

Lorsqu'un enfant a tiré un bonbon qu'il n'aime pas, il le donne à l'autre enfant.

On note alors :

- Y_A la variable aléatoire égale au nombre de bonbons à la menthe détenus par Alice après les dons éventuels ;
- Y_C la variable aléatoire égale au nombre de nougats détenus par Cyril après les dons éventuels.

5. Justifier que l'univers image $Y_A(\Omega)$ de Y_A est égal à $\{0, 1, 2\}$.
6. (a) Quelle est la loi de $Y = Y_A + Y_C$?
(b) En déduire que la covariance $\text{Cov}(Y, Y_A)$ de Y et Y_A est nulle.
(c) Démontrer que $\text{Cov}(Y, Y_A) = \mathbb{V}(Y_A) + \text{Cov}(Y_A, Y_C)$ où $\text{Cov}(Y_A, Y_C)$ est la covariance de Y_A et Y_C et $\mathbb{V}(Y_A)$ la variance de Y_A .
(d) En déduire le signe de $\text{Cov}(Y_A, Y_C)$.
7. Justifier que $Y_A = 1 + X_A - X_C$.
8. En déduire l'espérance de Y_A et démontrer que sa variance vaut $\frac{9}{19}$.
9. À l'aide des résultats de la question précédente, justifier que la loi de Y_A n'est pas une loi binomiale.